Additionstheoreme der trigonometrischen Funktionen

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

gegeben: $\sin\alpha$, $\cos\alpha$

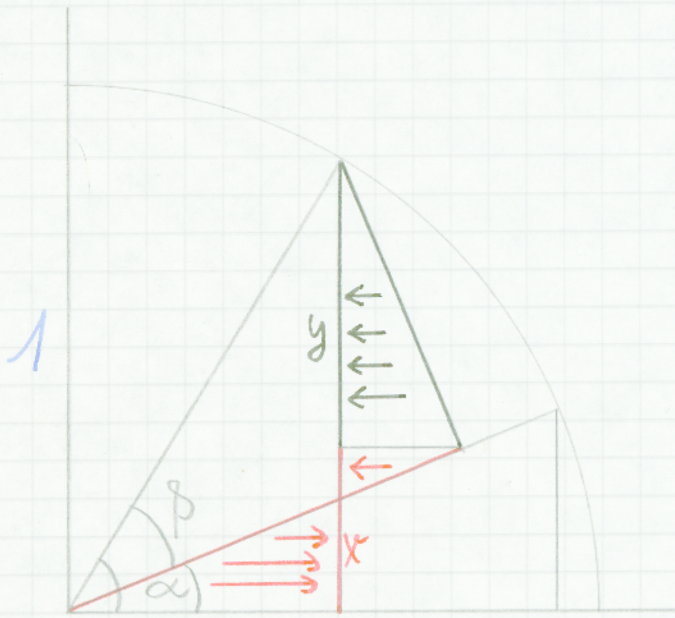
$\sin\beta$, $\cos\beta$

gesucht $\sin(\alpha+\beta)$

Andere Formen: $2^{\alpha+\beta} = 2^{\alpha}\cdot 2^{\beta}$

$2^{4+3} = 2^{4}\cdot 2^{3}$

Beweis:



$$\sin(\alpha+\beta) = x + y$$

$$\underbrace{\cos\beta\cdot\sin\alpha}_{x} + \underbrace{\sin\beta\cdot\cos\alpha}_{}$$

$$\boxed{\sin(\alpha\pm\beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta}$$

Die Formel gilt für beliebige Winkel α,β. Der obige Beweis gilt zunächst nur, falls sämtliche Winkel im I. Quadranten liegen. Für größere Winkel sind Fallunterscheidungen notwendig weil negative Werte auftreten. Wir werden den Beweis später rein rechnerisch mithilfe der komplexen Zahlen führen.

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cdot\cos(-\beta) + \cos\alpha\cdot\sin(-\beta)$$
$$= \sin\alpha\cdot\cos\beta - \cos\alpha\cdot\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \sin(\alpha+\beta+90^\circ)$$
$$= \sin[\alpha+(\beta+90^\circ)]$$
$$= \sin\alpha\cos(\beta+90^\circ) + \cos\alpha\sin(\beta+90^\circ)$$
$$= \sin\alpha\sin(\beta+90^\circ+90^\circ) + \cos\alpha\cdot\cos\beta$$
$$= \sin\alpha\sin(\beta+180^\circ) + \cos\alpha\cdot\cos\beta$$
$$= \sin\alpha(-\sin\beta) + \cos\alpha\cdot\cos\beta$$

$$\boxed{\cos(\alpha\pm\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta \mp \sin\alpha\cdot\sin\beta}$$

Additionstheoreme für tan und cot

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$$

$$= \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta} \quad \begin{array}{l} /:\cos\alpha\cdot\cos\beta \\ /:\cos\alpha\cdot\cos\beta \end{array}$$

$$= \frac{\dfrac{\sin\alpha\,\cancel{\cos\beta}}{\cos\alpha\,\cancel{\cos\beta}} + \dfrac{\cancel{\cos\alpha}\,\sin\beta}{\cancel{\cos\alpha}\,\cos\beta}}{\dfrac{\cancel{\cos\alpha}\,\cancel{\cos\beta}}{\cancel{\cos\alpha}\,\cancel{\cos\beta}} - \dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}$$

$$\boxed{\tan(\alpha\pm\beta) = \frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}}$$

$$\boxed{\cot(\alpha\pm\beta) = \frac{\cot\alpha\cot\beta\mp 1}{\cot\beta\pm\cot\alpha}}$$

Doppelwinkelformeln

$$\boxed{\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha} \quad \mathrm{I}$$

$$\boxed{\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha} \quad \mathrm{II}\,a$$

$$\cos(2\alpha) = (1-\sin^2\alpha) - \sin^2\alpha$$

$$\boxed{\cos(2\alpha) = 1 - 2\sin^2\alpha} \quad \mathrm{II}\,b$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - (1-\cos^2\alpha)$$
$$= 2\cos^2\alpha - 1$$

$$\boxed{\cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1} \quad \mathrm{II}\,c$$

$$\left.\begin{aligned} \tan(2\alpha) &= \ldots \\ \cot(2\alpha) &= \ldots \end{aligned}\right\} \text{vergleiche Bücher}$$

Mehrfachwinkelformeln

$$\sin(3\alpha) = \sin(\alpha + 2\alpha)$$
$$= \sin\alpha \cdot \underbrace{\cos(2\alpha)}_{\text{einsetzen}} + \cos\alpha \cdot \underbrace{\sin(2\alpha)}_{\text{einsetzen}}$$
$$=$$

$$\boxed{\sin(3\alpha) = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha}$$

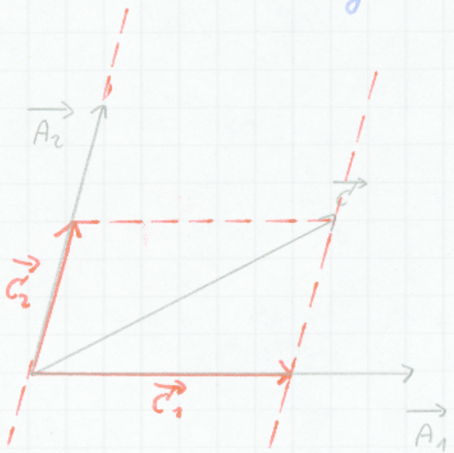
$$\boxed{\cos(3\alpha) = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha}$$

$$\boxed{\sin(5\alpha) = 5\sin\alpha - 20\sin^3\alpha + 16\sin^5\alpha}$$

Koordinatendarstellung eines Vektors

gegeben: $\vec{A_1}$; $\vec{A_2}$ Grundvektoren

Beliebiger Vektor $\vec{c}$



$\vec{c} = \vec{c_1} + \vec{c_2}$ (Komponentenzerlegung)

$\left.\begin{array}{l} \vec{c_1} = c_1 \cdot \vec{A_1} \\ \vec{c_2} = c_2 \cdot \vec{A_2} \end{array}\right\}$ Vielfache

$\vec{c} = c_1 \cdot \vec{A_1} + c_2 \cdot \vec{A_2}$ Koordinatendarstellung

$c_1 \cdot \vec{A_1} + c_2 \cdot \vec{A_2}$ Linearkombination von $\vec{A_1}$; $\vec{A_2}$

Jeder Vektor in der Ebene läßt sich als Linearkombination von zwei Grundvektoren schreiben. Hierbei sind:

$\vec{A_1}$; $\vec{A_2}$ Grundvektorpaar = Basis

c_1 ; c_2 Koordinaten des Vektors $\vec{c}$ bezüglich der Basis (Skalare).

$\{c_1 , c_2\}$ Koordinatenpaar

09.11.77

Räumlich

$$\vec{c} = c_1 \cdot \vec{A_1} + c_2 \cdot \vec{A_2} + c_3 \cdot \vec{A_3}$$

$$\{c_1, c_2, c_3\} = \text{Koordinatentripel}$$

Die drei Basisvektoren dürfen nicht in einer Ebene liegen.

Allgemeiner Fall:

Basis $\vec{A_1}$; $\vec{A_2}$; $\vec{A_3}$ ist schiefwinkelig

Spezialfall:

Basis ist paarweise orthogonal (rechtwinkelig)

$$\vec{A_1} \perp \vec{A_2} \quad ; \quad \vec{A_2} \perp \vec{A_3} \quad ; \quad \vec{A_1} \perp \vec{A_3}$$

Spezial-Spezialfall:

Basis ist cartesisch

1. $\vec{A_1} \perp \vec{A_2} \quad \vec{A_2} \perp \vec{A_3} \quad \vec{A_1} \perp \vec{A_3}$

2. $|\vec{A_1}| = |\vec{A_2}| = |\vec{A_3}| = 1$

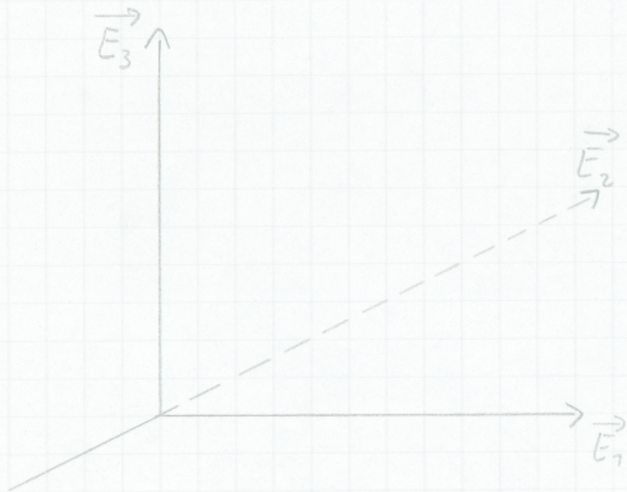
Neue Bezeichnung:

$$\vec{A_1} = \vec{i}$$
$$\vec{A_2} = \vec{j}$$
$$\vec{A_2} = \vec{k}$$

$$\vec{C} = c_1 \cdot \vec{I} + c_2 \cdot \vec{J} + c_3 \cdot \vec{K}$$

$$= c_x \cdot \vec{I} + c_y \cdot \vec{J} + c_z \cdot \vec{K}$$

$$= C_x \cdot \vec{E_x} + c_y \cdot \vec{E_y} + c_z \cdot \vec{E_z}$$



Rechts - Basis

Es ist üblich mit einer cartesischen Rechts-Basis zu arbeiten. Eine solche liegt vor, wenn die drei Vektoren $\vec{E_1}$; $\vec{E_2}$; $\vec{E_3}$ eine Rechtsschraube bilden.

Rechnen in Koordinatendarstellung

$$\vec{C} = c_1 \cdot \vec{I} + c_2 \cdot \vec{J} + c_3 \cdot \vec{K}$$

$$\vec{D} = d_1 \cdot \vec{I} + d_2 \cdot \vec{J} + d_3 \; \vec{K}$$

$$\vec{E} = \vec{C} \pm \vec{D}$$

$$= c_1 \cdot \vec{I} + c_2 \vec{J} + c_3 \vec{K} + d_1 \vec{I} \pm d_2 \vec{J} \pm d_3 \vec{K}$$

$$= (c_1 \pm d_1) \vec{I} + (c_2 \pm d_2) \vec{J} + (c_3 \pm d_3) \vec{K}$$

$$= e_1 \vec{I} + e_2 \vec{J} + e_3 \vec{K}$$

$$\boxed{S = \frac{n}{2}\left[2a_1 + (n-1)\,d\right]}$$

$$S = \frac{n}{2}\left[a_1 + \underbrace{a_1 + (n-1)\,d}_{a_n}\right]$$

$$\boxed{S = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}}$$

Arithmetische Interpolation

1 11 21 31

Es sollen 4 Glieder eingeschoben werden.

1 3 5 7 9 11

$$d_{neu} = \frac{d_{alt}}{4+1} = \frac{10}{5} = 2$$

allgemein : m gleich Interpolation

$$\boxed{d_{neu} = \frac{d_{alt}}{m+1}}$$

$3! \quad = \quad 1 \cdot 2 \cdot 3$ drei Fakultät

$7! \quad = \quad 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7$ sieben Fakultät

Definition:

$$\boxed{n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}$$

n Fakultät

$$\boxed{0! = 1}$$

Satz:

$$\boxed{\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}}$$

Probe
Beispiel

$$\binom{10}{4} = \frac{\cancel{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cancel{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}}$$

$0! = 1$

$1! = 1$

$2! = 2$

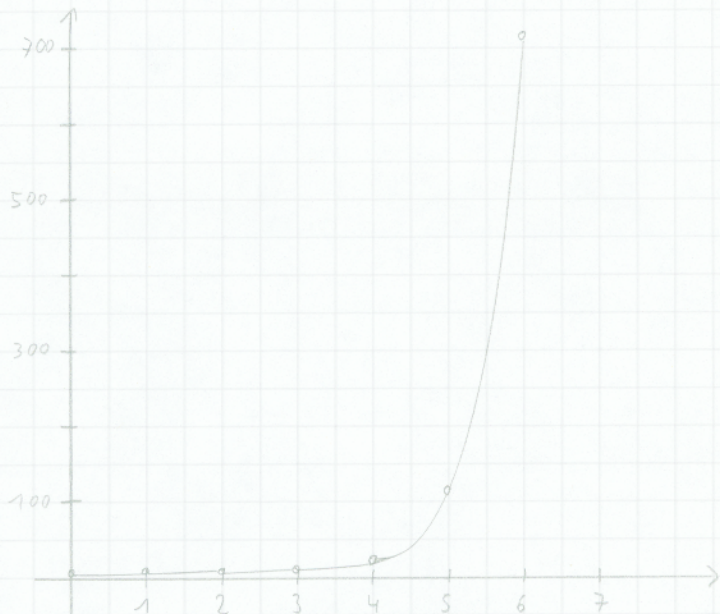
$3! = 6$

$4! = 24$

$5! = 120$

$6! = 720$

$7! = 5040$



Verallgemeinerung von $n!$ $\qquad z!$ Gammafunktion

$y^{(0)} = x^2 =$ ursprüngliche Funktion = Stammfunktion

$y = x^3$; $y' = 3x^2$; $y'' = 6x$; $y''' = 6$; $y^{(4)} = 0$

$y = x^n$

$y^{(0)} = x^n$

$y' = n \cdot x^{(n-1)}$

$y'' = n(n-1) \cdot x^{(n-2)}$

$y^{(3)} = n(n-1)(n-2)\, x^{(n-3)}$

$y^{(n)} = n!$

$y^{(n+1)} = 0$

$y = \sin x$

$y^{(0)} = \sin x$

$y' = \cos x$

$y'' = -\sin x$

$y''' = -\cos x$

$y^{(4)} = \sin x$

$y^{(5)} = \cos x$

$y^{(96)} = \sin x$

Die n-te Ableitung der Funktion $y = \sin x$ ist periodisch mit der Periode 4 (periodisch modulo 4). Genauso verhält sich die cos-Funktion.

Elementare Integrationsregeln

1. Regel über einen konstanten Faktor

$$\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C$$

$$\int 7x\,dx = 7\int x\,dx = 7\left(\frac{x^2}{2} + C\right) = 7\frac{x^2}{2} + 7C = 7\frac{x^2}{2} + D$$

$$\boxed{\int a\,f(x)\,dx = a\int f(x)\,dx}$$

Enthält das Integral einen konstanten Faktor, so kann dieser vor das Integral gezogen werden.

2. Summenregel

$$\int (x + x^2)\,dx = \int x\,dx + \int x^2\,dx$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} + C_1\right) + \left(\frac{x^3}{3} + C_2\right)$$

$$= \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + C_1 + C_2 = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + C$$

$$\boxed{\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx}$$

Beispiele:

$$\int (3x^2 - 7x + 5)\,dx$$

$$= \int 3x^2\,dx + \int -7x\,dx + \int 5\cdot 1\,dx$$

$$= 3\int x^2\,dx - 7\int x\,dx + 5\int 1\,dx$$

Horner Schema

$$y = x^3 - x^2 - 41x + 105 \qquad x_1 = 5$$

Das Horner Schema wird hauptsächlich benutzt zur Berechnung des Funktionswertes eines Polynoms.

Berechnen:

$$y(4) = ?$$

1. Methode: Berechne x^2; x^3 Multiplikation mit Koeffizienten und Addition
2. Methode: Horner Schema

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$
$$= ((ax+b)x+c)x+d$$
$$y = ((1 \cdot x - 1)x - 41)x + 105$$

	1	−1	−41	105
	0	4	12	−116
$x=4$	1	3	−29	$\underline{\underline{-11}}$

Anzahl der Rechenoperationen bei Polynomen 100. Grades:

1. Methode
   - 100 Multiplikationen
   - 100 Multiplikationen
   - 100 Additionen

2. Methode (Horner Schema)
   - 100 Multiplikationen $\cdot x$
   - 100 Additionen der Koeffizienten

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & -1 & -41 & 105 \\
 & 0 & 5 & 20 & -105 \\
\hline
x=5 & 1 & 4 & -21 & \underline{\underline{0}}
\end{array}
\quad \text{Funktionswert}
$$

$$(x^3 - x^2 - 41x + 105) : (x-5) = 1x^2 + 4x - 21$$

$$
\begin{array}{l}
\pm x^3 \mp 5x^2 \\
\hline
\quad 4x^2 \\
\quad \pm 4x^2 \mp 20x \\
\hline
\qquad -21x + 105 \\
\qquad -21x + 105 \\
\hline
\qquad\ 0 \quad\ \ 0
\end{array}
$$

<u>In diesem Falle gilt:</u>

Die Zwischenwerte des Horner Schemas sind die Koeffizienten des dividierten Polynoms. Der Endwert im Horner Schema ist der Funktionswert.

Stelle $x = 4$

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & -1 & -41 & 105 \\
 & 0 & 4 & 12 & -116 \\
\hline
x=4 & 1 & 3 & -29 & \underline{\underline{-11}}
\end{array}
$$

$$(x^3 - x^2 - 41x + 105) : (x-4) = 1x^2 + 3x - 29$$

$$
\begin{array}{l}
\pm x^3 \mp 4x^2 \\
\hline
\quad 3x^2 - 41x \\
\quad \pm 3x^2 \mp 12x \\
\hline
\qquad -29x + 105 \\
\qquad \mp 29x \pm 116 \\
\hline
\qquad\ 0 \quad -11
\end{array}
\qquad = f(4)
$$

<u>Erweiterter Satz:</u>

Die Zwischenwerte im Horner Schema liefern die Koeffizienten des dividierten Polynoms. Der Endwert im Hornerschema ist gleich dem Divisionsrest und gleich dem Funktionswert an der betrachteten Stelle.

$$\frac{x^3 - x^2 - 41x + 105}{x-4} = x^2 + 3x - 29 + \frac{-11}{x-4}$$

$$\frac{x^3 - x^2 - 41x + 105}{x-5} = x^2 + 4x - 21 + \frac{0}{x-5}$$

Integration von rationalen Funktionen

$$\int \frac{3x-5}{x^2+2x-8}\,dx = ?$$

$$\frac{3x-5}{x^2+2x-8} = \frac{\frac{1}{6}}{x-2} + \frac{\frac{17}{6}}{x+4}$$

$$(x-2)(x+4) = x^2+2x-8$$

$$\int \frac{3x-5}{x^2+2x-8}\,dx = \frac{1}{6}\int \frac{1}{x-2}\,dx + \frac{17}{6}\int \frac{1}{x+4}\,dx$$

$$= \frac{1}{6}\ln(x-2) + \frac{17}{6}\ln(x+4) + K$$

Die Integration rationaler Funktionen wird durchgeführt, indem man die rationale Funktion in eine Summe von Partialbrüchen umwandelt, die dann einfach zu integrieren ist. Das eigentliche Problem besteht in der Partialbruchzerlegung rationaler Funktionen

Partialbruchzerlegung rationaler Funktionen

$$y = \frac{Z(x)}{N(x)}$$

Vorraussetzung: Eine echt gebrochene rationale Funktion. Der Nenner hat Nullstellen $(x_1; x_2; x_3; \dots; x_r)$

Ist eine rationale Funktion unecht gebrochen, so dividiert man ab. Der ganze Bestandteil ist leicht zu integrieren (Polynom). Der Rest erfüllt die obigen Vorraussetzungen, es ist eine echt gebrochene rationale Funktion.

I. Fall: Der Nenner hat nur einfache reelle Nullstellen.

20.04.78

$$y = \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + —$$

Diese unendliche Reihe konvergiert sehr schnell, man kann sie nach einigen Gliedern abbrechen, da die Fakultät im Nenner den Zähler erschlägt.

$$y = \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + —$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

e-Reihe : Volle Fakultätenreihe

cos-Reihe : Gerade, alternierende Fakultätenreihe

sin-Reihe : Ungerade, alternierende Fakultätenreihe

↑ Taylor-Reihen ↑

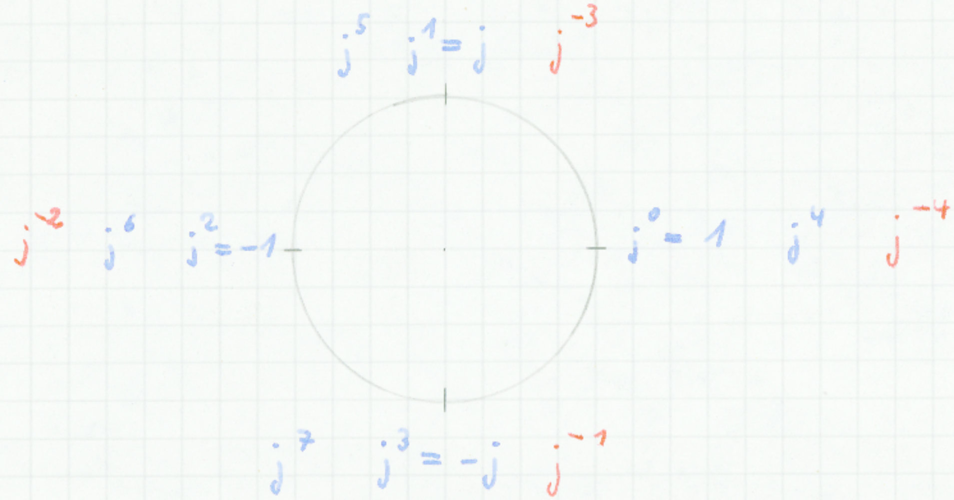
$j^{97} = \frac{97}{4} = 24$ Rest 1 $\qquad 97 \equiv 1 \pmod 4$

$\qquad 96 \equiv 0 \pmod 4$

$j^{97} = j^{1} = j$

$j^{101} = j^{1} = j$

$j^{27} = j^{3} = -j \qquad 27 \equiv 3 \pmod 4$



$j^{-1} = \frac{1}{j} = \frac{1 \cdot j}{j \cdot j} = -j$

$j^{-2} = \frac{1}{j^{2}} = \frac{1}{-1} = -1$

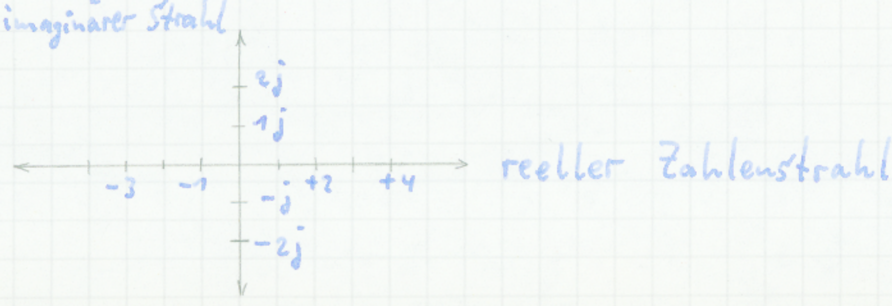
$j^{-3} = \frac{1}{j^{2} \cdot j} = (-1)(-j) = j$

$j^{-4} = \frac{1}{j^{2} \cdot j^{2}} = \frac{1}{(-1)(-1)} = 1$

$j^{-5} = j^{-1} \qquad -5 \equiv -1 \pmod 4$

$j^{-11} = j^{-7} = j^{-3} = j^{1} = j^{5} = j^{9}$

Darstellung reeller und imaginärer Zahlen



$a \cdot 0 = 0$

$0 \cdot j = j \cdot 0 = 0$

$$\ln(-1) = \ln(1) + j\,(180^\circ \pm n\cdot 360^\circ)$$
$$= j\pi \quad + 2\pi n j$$
$$\mathrm{Ln}\,(-1) = \pi j$$
$$\mathrm{Ln}\,(-10) = \ln 10 + j\cdot\pi$$

Potenzieren komplexer Zahlen

$$z = 2+3j$$
$$z^5 = (2+3j)^5 = 2^5 + \binom{5}{1}\cdot 2^4 (3j)^1 + \binom{5}{2}\cdot 2^3 (3j)^2 + \cdots$$

binomischer Satz (widerlich!)

Besser!

$$z = r\cdot e^{j\varphi} \rightarrow z^n = (r\cdot e^{j\varphi})^n$$
$$= r^n \cdot e^{j\varphi n}$$

$$\boxed{\begin{aligned} z = r\cdot e^{j\varphi} \rightarrow z^n &= r^n e^{jn\varphi} \\ &= r^n (\cos n\varphi + j \sin n\varphi) \end{aligned}}$$

Moivre'sche Formel

$$z = 2+3j \rightarrow$$
$$= r\cdot e^{j\varphi} \rightarrow z^5 = (2+3j)^5 = r^5\cdot e^{j5\varphi}$$

Radizieren komplexer Zahlen

$$w = \sqrt[n]{z} \rightarrow w^n = z$$

$$z = r e^{j\varphi} \rightarrow w = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\; e^{j\frac{\varphi}{n}}$$

Beweis:

$$w^n = \left(\sqrt[n]{r}\, e^{j\frac{\varphi}{n}}\right)^n$$
$$= r\cdot e^{j\varphi} = z$$

q.e.d.

2. Lösung: $y = \cos x$

$y' = -\sin x$

$y'' = -\cos x$

$-\cos x + \cos x = 0$

3. Lösung: $y = e^{jx}$

$y' = j e^{jx}$

$y'' = -1 e^{jx}$

$y'' + y = 0$

$\bigwedge_x$: für alle x

$\bigwedge_x \quad -1e^{jx} + e^{jx} = 0$

Allgemeine Form der Differentialgleichung

implizite Differentialgleichung
$$\begin{cases} F(x, y', y'', \ldots) = 0 & \\ F(x, y, y') = 0 & \text{Differentialgleichung 1. Ordnung} \\ F(x, y, y', y'') = 0 & \text{Differentialgleichung 2. Ordnung} \end{cases}$$

Ist eine Differentialgleichung nach der höchsten Ableitung aufgelöst, so heißt sie explizit.

explizite Differentialgleichung
$$\begin{cases} y' = f(x, y) & \text{Differentialgleichung 1. Ordnung} \\ y'' = f(x, y, y') & \text{Differentialgleichung 2. Ordnung} \end{cases}$$

Kommt in einer Differentialgleichung die n-te Ableitung vor, höhere Ableitungen aber nicht, so spricht man von einer Differentialgleichung n-ter Ordnung. Die Ordnung gibt also die Nummer der höchstvorkommenden Ableitung an.

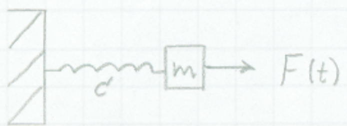
$$\ddot{s} = g = const = 9{,}81 \frac{m}{sec^2}$$

$$\dot{s} = \int \ddot{s}\, dt = gt + c_1$$

$$s = \int \dot{s}\, dt = \int (gt + c_1)\, dt$$

$$\boxed{s = g\frac{t^2}{2} + c_1 t + c_2}$$ allgemeine Lösung

II Masse – Feder – Sysystem



$m \cdot \ddot{s}$ = Summe aller Kräfte

$$= \underbrace{F(t)}_{\text{äußere Kraft}} + \underbrace{(-c \cdot s)}_{\text{Federkraft (Hooke)}}$$

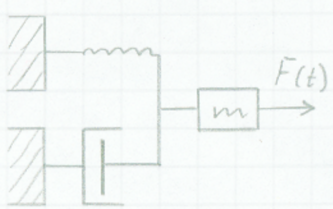
$m\ddot{s} + c \cdot s = F(t)$ Differentialgleichung 2. Ordnung

Differentialgleichung der erzwungenen Schwingung

Spezialfall: $F(t) = 0 \rightarrow$

$m\ddot{s} + c \cdot s = 0$ Differentialgleichung der freien Schwingung

III Masse – Feder – Dämpfungssystem



$m \cdot \ddot{s}$ = Summe aller Kräfte

$$= \underbrace{F(t)}_{\text{äußere Kraft}} + \underbrace{(-c \cdot s)}_{\text{Federkraft (Hooke)}} + \underbrace{(-d \cdot \dot{s})}_{\text{Dämpfungskraft}}$$

$m \cdot \ddot{s} + d\dot{s} + c \cdot s = F(t)$ Differentialgleichung der erzwungenen gedämpften Schwingung

$F(t) = 0$ $m\ddot{s} + d\dot{s} + c \cdot s = 0$ Differentialgleichung der freien gedämpften Schwingung

Lineare Differentialgleichung 1. Ordnung (allgemein):

$f_1(x)\,y' + f_0(x)\,y = s(x)$

f_1, f_0 → Koefizienten (Funktion)

$s(x)$ → Störfunktion (von $y, y', \ldots$ freies Glied)

Lineare Differentialgleichung 2. Ordnung (allgemein):

$f_2(x)\,y'' + f_1(x)\,y' + f_0(x)\,y = s(x)$

f_2, f_1, f_0 → Koeffizienten

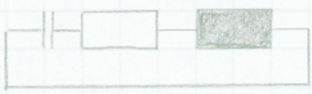
$s(x)$ → Störfunktion

$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = u(t) \rightarrow$ Störfunktion

lineare Differentialgleichung 2. Ordnung: inhomogen (weil Störfunktion $\neq 0$)

$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = 0 \leftarrow$ Störfunktion

Lineare Differentialgleichung 2. Ordnung: homogen (weil Störfunktion $= 0$)



In einer Differentialgleichung heißt das von y freie Glied Störfunktion. Ist die Störfunktion null, so spricht man von einer linearen homogenen Differentialgleichung, ist die Störfunktion ungleich null, so spricht man von einer inhomogenen Differentialgleichung.

$L = \text{const}$; $R = \text{const}$; $C = \text{const}$ } Konstante Koeffizienten

$x^2 y'' + \sin x\, y' + e^x y = 0$ Lineare Diffgl. 2. Ordnung, homogen mit variablen Koeffizienten

Abkürzungen:

Konstante Koeffizienten	:	K K
Variable Koeffizienten	:	V K
homogen	:	hom
inhomogen	:	inhom

c)
$$\begin{vmatrix} 10 & 19 & 16 \\ 6 & 11 & 13 \\ 5 & 13 & 12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -9 & 19 & 16 \\ -5 & 11 & 13 \\ -6 & 13 & 12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -9 & 3 & 16 \\ -5 & -2 & 13 \\ -6 & 1 & 12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 16 \\ -11 & -2 & 13 \\ -3 & 1 & 12 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 3 & 16 \\ 0 & -17 & -93 \\ -3 & 1 & 12 \end{vmatrix}$$

d)
$$\begin{vmatrix} 23 & 1 & 25 \\ 30 & 3 & 32 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 21 & 1 & 25 \\ 24 & 3 & 32 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 7 & 1 & 25 \\ 8 & 3 & 32 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 3 \begin{vmatrix} 7 & -49 & 23 \\ 8 & -61 & 32 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 7 & -49 \\ 8 & -61 \end{vmatrix} = 3\left[7(-61) - 8(-49)\right] = 3(-35) = \underline{\underline{-105}}$$

e)
$$\begin{vmatrix} 7 & 3 & -5 \\ 3 & -2 & 6 \\ 5 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 8 & -5 \\ 8 & -8 & 6 \\ 5 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 0 & 1 \\ 3 & -8 & 6 \\ 5 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

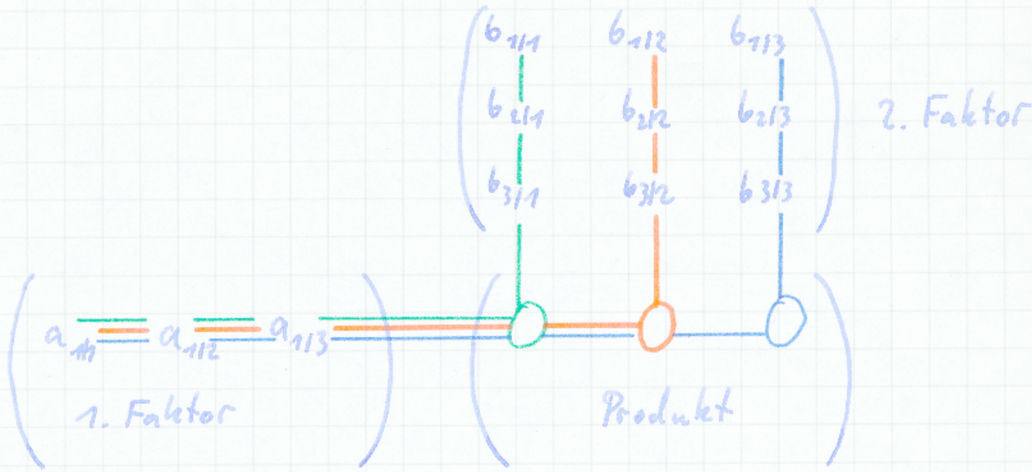
$$= -8 \begin{vmatrix} 10 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -8\left[10 \cdot 3 - 5 \cdot 1\right] = -8 \cdot 25 = \underline{\underline{-200}}$$

Sonderregel zum Entwickeln von dreireihigen Determinanten (3. Ordnung; Regel von Sarrus)

$$D = \left|\begin{array}{ccc|cc} \overset{+}{a_1} & \overset{+}{b_1} & \overset{+}{c_1} & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ \underset{-}{a_3} & \underset{-}{b_3} & \underset{-}{c_3} & a_3 & b_3 \end{array}\right.$$

$$D = \left[a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3\right] - \left[a_3 b_2 c_1 + b_3 c_2 a_1 + c_3 a_2 b_1\right]$$

13. 10. '78



$$\begin{pmatrix} a_{1|1} \; b_{1|1} + a_{1|2} \, b_{2|1} + a_{1|3} + b_{3|1} \; ; \; a_{2|1} \, b_{1|2} + a_{2|2} \, b_{2|2} + a_{2|3} \, b_{2|3} ; + a_{3|2} \, b_{2|3} + a_{3|1} b_{3|3} \\ \ldots \\ \ldots \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 15 & 11 \\ 14 & 13 \end{pmatrix}$$

$$\underset{2 \times 4}{\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & -2 \\ 6 & 8 & 0 & 3 \end{pmatrix}} \cdot \underset{3 \times 2}{\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}}$$

kein Ergebnis

3 Aufgaben:

1. Berechnen Sie, wo es möglich ist, folgende Matrizen:
$A + B$; $A - B$; $A \cdot B$; $B \cdot A$

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$

Gradient, Divergenz, Rotation

Nabla oder Hamilton-Operator (Differential-Vektor-Operator)

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

$\nabla \cdot$ Skalarfunktion $\rightarrow$ Vektorfunktion $=$ Vektorfeld

$\nabla \cdot$ Vektorfunktion $\rightarrow$ Skalarfunktion $=$ Skalarfeld

$\nabla \times$ Vektorfunktion $\rightarrow$ Vektorfunktion $=$ Vektorfeld

Skalarfunktion: $\Phi = \Phi(x, y, z)$

Vektorfunktion: $\vec{A} = A_1 \cdot \vec{i} + A_2 \cdot \vec{j} + A_3 \cdot \vec{k} = (A_1; A_2; A_3)$

$$\boxed{\text{grad. } \Phi = \nabla \cdot \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\vec{k}}$$

$$\boxed{\text{div. } \vec{A} = \nabla \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}}$$

$$\text{rot. } \vec{A} = \nabla \times \vec{A} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\cdot\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\cdot\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right) \times \left(A_1\vec{i} + A_2\vec{j} + A_3\vec{k}\right)$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_2 & A_3 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & A_3 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ A_1 & A_2 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}\left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right) + \vec{j}\left(-\frac{\partial A_3}{\partial x} + \frac{\partial A_1}{\partial z}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\right)$$

Fourier-Analyse ; Harmonische Analyse

$$y = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x + \cdots$$
$$+ b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + \cdots$$

$$\boxed{y = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)}$$

= Fourier-Reihe

harmonische Analyse:

Grundschwingung = Fundamentalschwingung = erste Harmonische

$T = \frac{2\pi}{\omega}$

Erste harmonische Oberschwingung = zweite Harmonische

$T = \frac{2\pi}{2\omega}$

Zweite harmonische Oberschwingung = dritte Harmonische

$T = \frac{2\pi}{3\omega}$

a_0, a_n, b_n : Fourier-Koeffizienten

Problem: Wie bestimmt man die Forier-Koeffizienten?

Zunächst braucht man einige bestimmte Integrale:

$$\int_0^{2\pi} \cos nx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, dx = 0$$

La - Place - Transformation

Definition der Laplace - Transformation:

$F(t)$ sei irgendeine Funktion von $t > 0$

$$\boxed{L\left\{F(t)\right\} = f(s) = \int_0^\infty e^{-st} F(t)\, dt}$$

$F(t) \rightarrow f(s)$ d.h. Variable t wird umgesetzt in Variable s

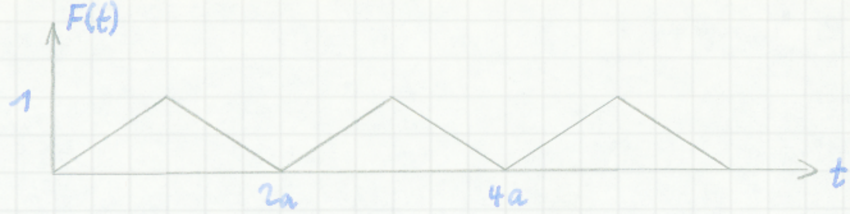
$G(t) \rightarrow g(s)$

$Y(t) \rightarrow y(s)$

Tabelle:

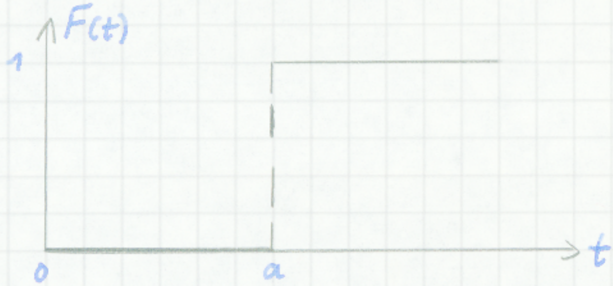
$F(t)$	$L\left\{F(t)\right\} = f(s)$	
1	$\frac{1}{s}$	$s > 0$
t	$\frac{1}{s^2}$	
t^n $n \in N$ $n = 0, 1, 2, \dots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$s > a$
$\sin at$	$\frac{a}{s^2+a^2}$	$s > 0$
$\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2}$	
$\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$	

Beispiel:



$$f(s) = \frac{1}{a s^2} \tanh\left(\frac{a s}{2}\right)$$

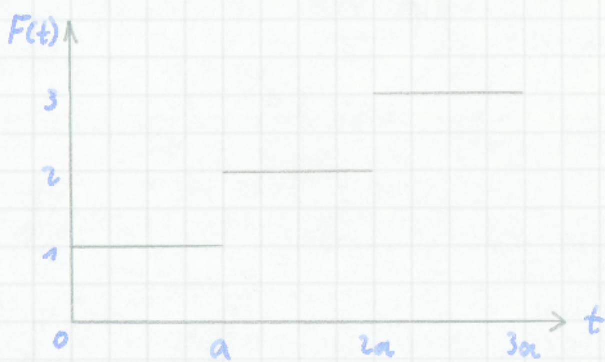
Heavyside Sprungfunktion



$$f(s) = \frac{e^{-as}}{s}$$

$$f(s) = \frac{e^{-as}\left(1-e^{-\varepsilon s}\right)}{s}$$

Treppenfunktion:



$$f(s) = \frac{1}{s\left(1-e^{-as}\right)}$$